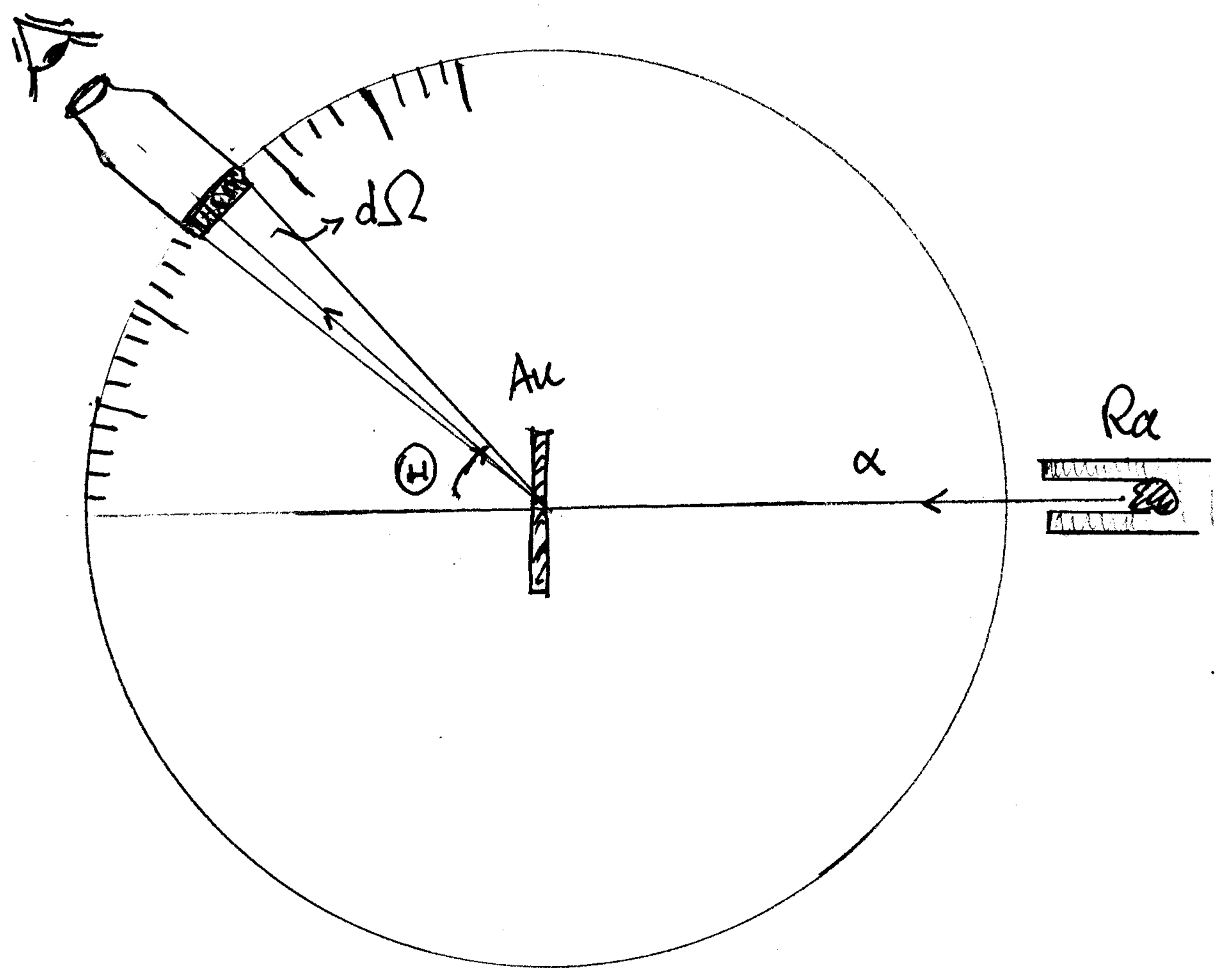

dΩ
Au
Θ
α
Ra

§ Movimento de Partículas carregadas em Campos Eletromagnéticos

Encerramos o capítulo com o estudo de forças não centrais, embora possam ser conservativas. O exemplo importante que trataremos se refere ao movimento de partículas carregadas. As forças de interação são obtidas a partir dos campos eletromagnéticos. Os campos são 'objetos' locais que se propagam com a velocidade da luz. Sendo a velocidade finita (embora grande), a ação a distância não é instantânea. Este fato faz com que a 3ª Lei de Newton não seja satisfeita na forma estrita, pois ação e reação não estão dirigidas segundo a linha que liga as partículas (mas são iguais em magnitude e opostas em sentido).

Seja o caso de uma partícula de massa 'm' e carga 'q'. Na presença de campos eletromagnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, a força que opera sobre ela é dada por:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right), \quad \text{Força de Lorentz}}$$

As fontes dos campos são partículas carregadas em movimento (distribuições de carga e correntes elétricas).

O termo $q\left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$ não é central, mas não realiza trabalho, porque a força resulta perpendicular à velocidade. A força de Lorentz acima está escrita em unidades gaussianas: q em unidades eletrostáticas, B em Gauss, e F em unidades (cgs).

A constante 'c' representa a velocidade da luz,

$$c = 2.99792456\ldots \times 10^{10} \text{ (cm/s)}$$
$$\approx 3.0 \times 10^{10} \text{ (cm/s)}$$

Os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{B}$) satisfazem as eqs. de Maxwell para o vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} ,$$

onde ρ e $\vec{J}$ são as densidades de carga e corrente, respectivamente. Temos também uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 ,$$

que expressa a conservação da carga.

Se o campo magnético for constante no tempo, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

tilibra

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \ ,$$

e o campo (e a força associada) pode ser derivado de um potencial elétrico:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E} \ ,$$

com $\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$.

Como $\vec{E}$ é a força por unidade de carga, a energia potencial é dada por

$$V(r) = q\,\phi(\vec{r}).$$

Como o campo magnético $\vec{B}$ não realiza trabalho, a conservação da energia é escrita como:

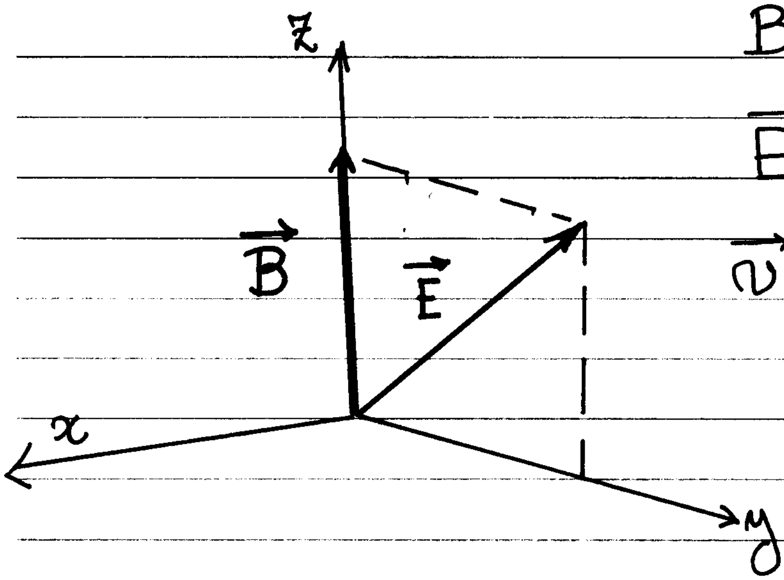
$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} + q\,\phi(\vec{r}).$$

Trabalhamos agora com campos constantes e uniformes.

Problema: Resolver as equações de movimento de uma partícula de massa 'm' e carga 'q' na presença de campos eletromagnéticos (constantes e uniformes).

Orientamos o sistema de coordenadas

como mostrado na figura:



$$\vec{B} = B\,\hat{k}$$

$$\vec{E} = E_y\,\hat{j} + E_z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

Temos:

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$,

de forma que:

$$\vec{v}\times\vec{B} = B\dot{y}\,\hat{i} - B\dot{x}\,\hat{j} .$$

As eqs. de movimento ficam:

$$m\ddot{x} = \frac{q}{c}B\dot{y}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = qE_y - \frac{q}{c}B\dot{x}, \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = qE_z . \qquad (3)$$

A eq. (3) pode ser resolvida de maneira imediata; trata-se de movimento uniformemente acelerado:

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{1}{2}\,\frac{q}{m}E_z t^2 ,$$

com duas constantes $(z_0, \dot{z}_0)$. Ele está desacoplado das coordenadas (x,y). Reescrevemos as equações (1) e (2) na forma:

A) $$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{c}v_y ,$$

B) $$m\frac{dv_y}{dt} = qE_y - \frac{qB}{c}v_x ,$$

onde (v_x, v_y) estão acopladas. Usamos a técnica de derivar A) e substituir B) na nova equação:

$$m\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{c}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = \frac{qB}{mc}\left(qE_y - \frac{qB}{c}v_x\right)$$

$$= \frac{q^2B}{mc}E_y - \frac{1}{m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2 v_x ,$$

ou seja:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{q^2B}{m^2c}E_y - \left(\frac{qB}{mc}\right)^2 v_x ,$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{mc}\right)^2 v_x = \left(\frac{qB}{mc}\right)\frac{q}{m}E_y$$

Fazemos agora as definições:

Def. Frequência de ciclotron, ω

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc} .$$

Def. Aceleração do campo elétrico,

$$a \equiv \frac{q}{m} E_y$$

A eq. obtida fica na forma:

$$\boxed{\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = \omega a ,}$$

que é a eq. diferencial para um oscilador harmônico forçado para v_x.

Solução:

$$v_x(t) = \frac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x)$$

O mesmo processo pode ser feito com o componente v_y:

$$m \frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \frac{qB}{c} \left(\frac{dv_x}{dt} \right)$$

$$= - \frac{qB}{mc} \left(\frac{q}{c} B v_y \right)$$

Resultando em

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{mc}\right)^2 v_y$$

ou

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \,,$$

que é a eq. diferencial do oscilador harmônico para v_y.

Solução:

$$v_y(t) = A_y \cos(\omega t + \theta_y) \,.$$

Juntamos ambas soluções abaixo:

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x) \,, & A^*) \\ v_y(t) = A_y \cos(\omega t + \theta_y) \,, & B^*) \end{cases}$$

que podem ser integradas para obtermos as coordenadas:

$$x(t) = R_x + \frac{at}{\omega} + \frac{A_x}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_x)$$

$$y(t) = R_y + \frac{A_y}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_y)$$

Quantas constantes? $(R_x, R_y, A_x, \theta_x, A_y, \theta_y)$

En total 6! 2 constantes a mais!

Foram introduzidas constantes adicionais no processo de derivar as eqs. de movimento. As eqs. de Newton só contém até 2a's derivadas. Portanto precisamos eliminar duas constantes. Como fazer? Derivar as soluções A*) e B*) e substituir nas eqs. originais A) e B) e verificar a compatibilidade:

$$\dot{v}_x = -\omega A_x \operatorname{sen}(\omega t + \theta_x),$$

$$\dot{v}_y = -\omega A_y \operatorname{sen}(\omega t + \theta_y).$$

Substituindo em A) + B):

A) $-m\omega A_x \operatorname{sen}(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y),$

B) $-m\omega A_y \operatorname{sen}(\omega t + \theta_y) = -\frac{qB}{c}\left(\cancel{\frac{a}{\omega}} + A_x \cos(\omega t + \theta_x)\right) + \cancel{qE_y},$

eliminando constantes:

A) $-A_x \operatorname{sen}(\omega t + \theta_x) = A_y \cos(\omega t + \theta_y),$

B) $A_y \operatorname{sen}(\omega t + \theta_y) = A_x \cos(\omega t + \theta_x).$

Estas igualdades tem que ser satisfeitas para todo $\underline{t}$.

Multiplicando ambas obtemos:

A) × B) :

$$-A_x A_y \operatorname{sen}(\omega t+\theta_x)\operatorname{sen}(\omega t+\theta_y) =$$

$$= A_x A_y \cos(\omega t+\theta_x)\cos(\omega t+\theta_y),$$

supondo $A_x A_y \neq 0$, se reduz a:

$$\cos(\theta_y - \theta_x) = 0.$$

Solução, $\theta_y = \theta_x + \pi/2$.

De maneira que: $\cos(\omega t+\theta_y) = \cos(\omega t + \theta_x + \frac{\pi}{2})$
$= -\operatorname{sen}(\omega t+\theta_x)$.

De A) resulta que $A_y = A_x$.

Escrevemos: $A_y = A_x \equiv \omega A$, $\theta_x = \theta$

Agora voltamos para a solução integrada:

$$x(t) = R_x + \frac{a}{\omega} t + A \operatorname{sen}(\omega t+\theta),$$

$$y(t) = R_y + A \cos(\omega t+\theta).$$

Seja: $C_x(t) \equiv R_x + \frac{a}{\omega} t$

$C_y \equiv R_y$

$$\begin{cases} x - C_x = A \operatorname{sen}(\omega t + \theta), \\ y - C_y = A \cos(\omega t + \theta), \end{cases}$$

verificando que:

$$\boxed{(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = A^2.}$$

Equação de um círculo de raio A e centro (C_x, C_y)

Note que o centro do círculo se desloca segundo o eixo 'x', com velocidade $\frac{a}{\omega} = v_c$

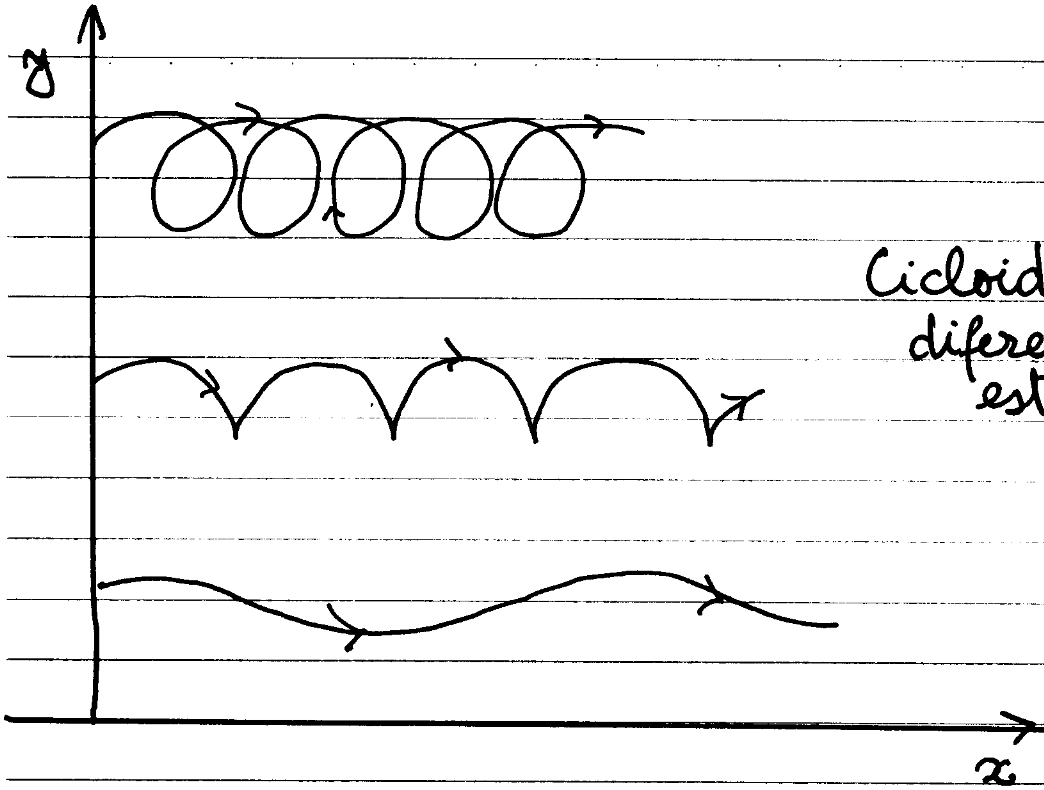
Temos:

$$v_c = \frac{\cancel{q}E_y}{\cancel{m}} \times \frac{\cancel{m}c}{\cancel{q}B} = c\left(\frac{E_y}{B}\right).$$

Temos diversas possibilidades de órbitas, dependendo dos valores relativos de

$$v_c = c\,\frac{E_y}{B} \quad \text{e} \quad A\omega = \frac{qB}{mc}A$$

Se v_c for lenta em comparação com $A\omega$, a partícula tenta completar a órbita de ciclotron e a órbita estará cheia de bucles. No caso contrário, a órbita tenderá a ser linear.



Cicloides de diferentes estruturas

Analisar caso particular, com $\vec{E} = 0$

$$\begin{cases} x(t) = R_x + A \operatorname{sen}(\omega t + \theta), \\ y(t) = R_y + A \cos(\omega t + \theta), \end{cases}$$

a órbita é um círculo de centro (R_x, R_y) e raio A:

$$(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 = A^2 ;$$

para a velocidade temos:

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \theta)$$
$$\dot{y} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$
$$\dot{z} = \dot{z}_0 .$$

Se for $\dot{z}_0 = 0$, $v^2 = \omega^2 A^2 = \frac{2E}{m} \Rightarrow$ conservado!

Resulta: $A^2 = \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow A = \frac{mc}{qB} v$

• Def. Raio de Ciclotron, R_c

$$R_c \equiv A = \frac{mc}{qB} v = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Aplicação 1.

medindo a curvatura obtemos informação sobre o momentum linear da partícula:

$$mv = p = \frac{qB}{c} R_c$$

Aplicação 2. Experiência de Thomson

Primeiro aceleramos a partícula carregada por uma diferença de potencial:

$$\frac{1}{2} m v^2 = q(\phi_0 - \phi_1).$$

A partícula, com velocidade v, entra numa região com campo magnético constante e uniforme B:

temos $R_c^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{2E}{m}\right) = \frac{2}{m\omega^2} q(\phi_0 - \phi_1)$

$$= \frac{2}{\cancel{m}} \frac{m^{\cancel{2}} c^2}{q^{2} B^2} \cancel{q}(\phi_0 - \phi_1),$$

fornecendo:

$$\frac{q}{m} = \frac{2c^2}{B^2 R_c^2} (\phi_0 - \phi_1) ,$$

portanto, medindo o raio de ciclotron obtemos a razão $\frac{q}{m}$ (Thomson) (1896)

A carga do elétron foi determinada por Millikan em 1911.

Aplicação 3. Ciclotron

Campo magnético uniforme e constante. As partículas carregadas são aceleradas por um campo elétrico alternado. Como a energia cresce, o raio de ciclotron também cresce, conforme a expressão:

$$R_c = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} ,$$

até um raio máximo R_{max}, quando as partículas emergem com uma energia bem definida

$$E_{max} = \frac{m}{2} \omega^2 R_{max}^2 .$$

É conveniente que a freqüência do campo elétrico oscilante coincida com a freqüência de ciclotron:

$$\nu = (2\pi)^{-1}\omega = (2\pi)^{-1}\frac{qB}{mc} = \frac{qB}{2\pi mc}$$

Aplicação 4. Betatron

No Bevatron, o raio de ciclotron R_c é mantido constante. Isso é mais conveniente, porque facilita a construção da câmara de vácuo, como um anel de raio definido. As partículas são aceleradas pelo aumento do campo magnético (campo magnético variável no tempo):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\,\nabla \times \vec{E}$$

O fluxo magnético variável induz um campo elétrico que acelera as partículas. Para manter R_c constante, o aumento de energia é compensado pelo aumento do campo magnético:

$$R_C = \frac{mc}{qB}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$$

ou seja: $\frac{\mathcal{E}}{B^2} = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2B}\left(\frac{d\mathcal{E}}{dB}\right) = \text{cte}$